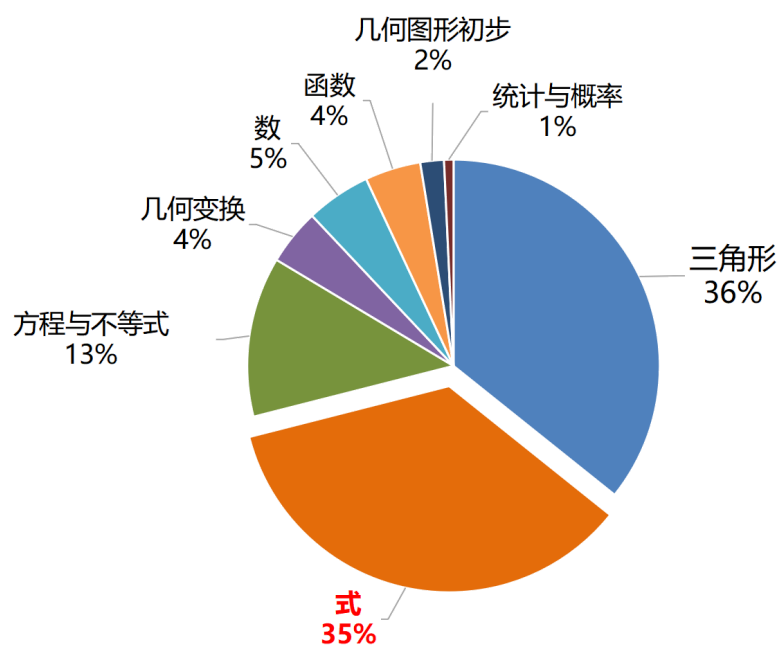


因式分解进阶一

知己知彼



一、系数为整式的十字相乘法

1. 系数是一次式

如，对于 $(a-b)x^2 + 2ax + a + b$ ，“二次项”系数是 _____、“常数项”是 _____，它们都是关于 a 、 b 的 _____ 次式、只能分解为 1 与本身或 -1 与相反数的乘积，从而可以画出以下十字：



根据乘积是“一次项”系数的十字，

$(a-b)x^2 + 2ax + a + b$ 可因式分解为 _____。

|| 例题

1. 分解因式：

(1) $ax^2 + (a+b)x + b$.

(2) $ax^2 + (ab+1)x + b$.

(3) $(a-b)x^2 + 2ax + a + b$.

2. 分解因式： $(k+2)x^2 - (4k+5)x + 3(k-1)$.

|| 练习

3. 因式分解 $kx^2 + (2k - 3)x + k - 3 = (\quad)$.

A. $(x + 1)(kx + k - 3)$ B. $(x + k - 3)(kx + 1)$ C. $(x - 1)(kx + k - 3)$ D. 无解

4. 因式分解： $ax^2 + (3a + 5)x + 2(a + 5)$.

2. 系数有二次式

如 $3ma^2 - 2mb^2 + (6 - m^2)ab$, 如果把它看成关于 a 、 b 的二次式, 那么 “二次项” 系数为 _____ , “常数项” 为 _____ , 由于 “一次项” 系数出现 6 , 所以要将 “二次项” 系数、“常数项” 分别分解出 _____ 和 _____ 并放在十字的对角线位置, 由于 “一次项” 系数出现 $-m^2$, 所以要将 “二次项” 系数、“常数项” 分别分解出 _____ 和 _____ 并放在十字的对角线位置, 即



从而这个多项式可因式分解为 _____ .

|| 例题

5. 分解因式：

(1) $32 - 12x - 27x^2$.

(2) $abcx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + abc$.

6. 分解因式 $(k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72$.

练习

7. 因式分解 $mx^2 - (m^2 + m + 1)x + m^2 + m = (\quad)$.

A. $(x + m)(mx + m + 1)$

B. $(x - m)(mx - m - 1)$

C. $m(x - 1)(x - m - 1)$

D. 无解

8. 分解因式 :

(1) $mnx^2 + (m^2 + n^2)x + mn$.

(2) $abx^2 - (a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)$.

(3) $x^2 - (6p + 5q)x + 9p^2 + 15pq + 6q^2$.

9. 分解因式：

(1) $abcx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + abc$.

(2) $kx^2 + k^2x + x + k^2 - 1$.

(3) $x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2$.

(4) $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6$.

(5) $a^2 + ab - 6b^2 + 5a + 35b - 36$.

(6) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$.

二、 双十字相乘法

复习：前面我们学过整式乘法知识，可以进行如下运算： $(x + p)(x + q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 、其中 p 、 q 为常数，根据系数之间的关系我们可以画出这样的十字来快速解决；

$$\begin{array}{cc} 1 & p \\ & \times \\ 1 & q \\ \hline 1 \cdot p + 1 \cdot q = p + q \end{array}$$

反过来，要对二次三项式 $x^2 + ax + b$ 作因式分解，

如果常数项 b 可以分解为_____的积，并且有 $p + q = a$ ，那么_____。这个过程也可画出十字来得到，就是分解因式的十字相乘法。

引入：

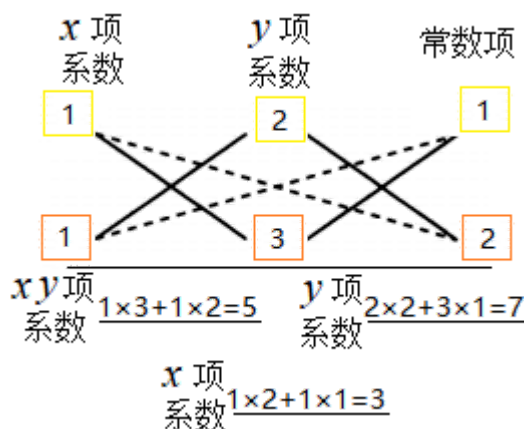
请完成下列整式乘法（请将结果中的高次项写在前面），并观察等号两端的式子、尝试回答后面的问题：

① $(x + 2y + 1)(x + 3y + 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

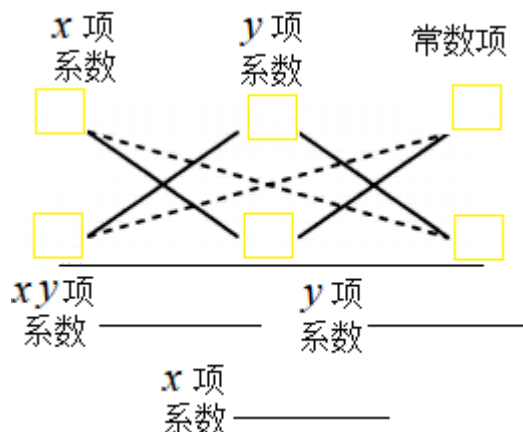
② $(x + 2y - 1)(x - 3y + 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

③ 上面两个等式左端是两个 _____ 次 _____ 项式的乘积，等号右端前三项都是 _____ 次项、第四项和第五项是 _____ 次项、常数项是左端 _____ 项的乘积；

④ 类比前面的十字相乘法我们可以画出双十字快速解决上面的整式乘法，
其中① 中的双十字如下：



请尝试完成② 中的双十字：



⑤ 请画出新的双十字来快速算出下面的整式乘法：

$(x + 2y + 1)(x + 3y - 2) = \underline{\hspace{2cm}}$;

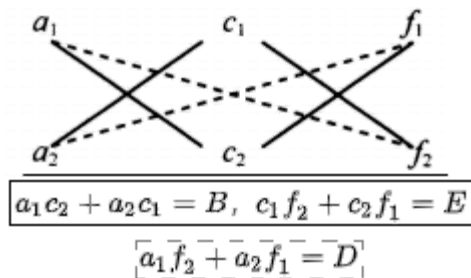
$(x + 2y - 3)(2x + 3y + 4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【总结】一般地， $(a_1x + c_1y + f_1)(a_2x + c_2y + f_2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

其中常数 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 满足：① $A = a_1a_2$ ， $C = c_1c_2$ ， $F = f_1f_2$ ，

② $a_1c_2 + a_2c_1 = B$ ， $c_1f_2 + c_2f_1 = E$ ， $a_1f_2 + a_2f_1 = D$ ，

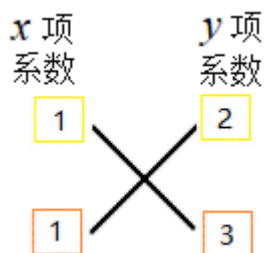
用双十字法可以画出来快速解决。



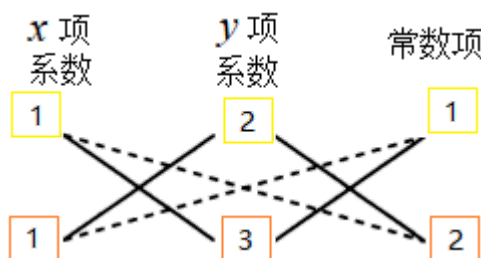
反过来，我们也可以用双十字法来分解含两个字母及以上的二次多项式，

比如，要分解 $x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 7y + 2$ ，

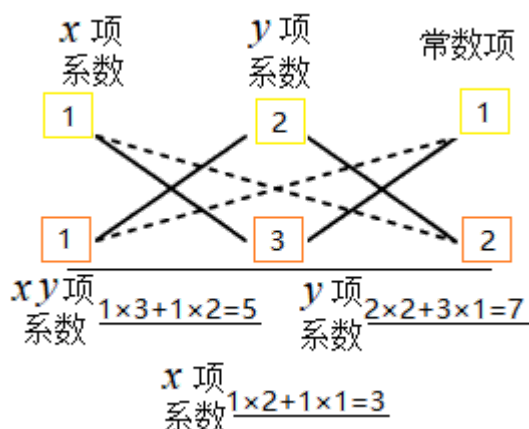
我们先把前三项用十字相乘法分解，如下图



再在右边一列添上常数项 2 的因数，如下图，验证三个交叉相乘的乘积是否分别等于原式的 x 项系数、 y 项系数；



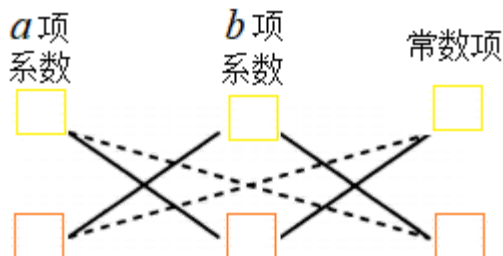
验证发现这些乘积分别与两个系数相等，



因此两行各数（从左到右）分别是两个因式 x 项系数、 y 项系数和常数项，即

$$x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 7y + 2 = (x + 2y + 1)(x + 3y + 2) ;$$

再比如，要分解 $6a^2 + 11ab + 3b^2 + 4a - b - 2$ ，画出双十字如下：



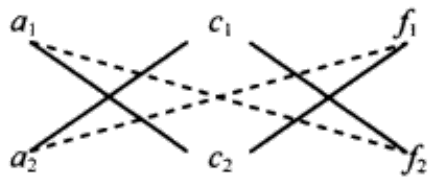
因此 $6a^2 + 11ab + 3b^2 + 4a - b - 2 =$ _____ .

【总结】

双十字相乘法可用于分解 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ 型的多项式，

其中常数 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 要满足条件：① $A = a_1a_2$ ， $C = c_1c_2$ ， $F = f_1f_2$ ，

② $a_1c_2 + a_2c_1 = B$ ， $c_1f_2 + c_2f_1 = E$ ， $a_1f_2 + a_2f_1 = D$ ，即：



则 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F =$ _____ .

|| 例题

10. 分解因式：

(1) $x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2$.

(2) $3x^2 + 4xy - 4y^2 + 8x - 8y - 3$.

11. 双十字相乘法：

(1) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$.

(2) $10x^2 - 4y^2 + 18xy - 11x + 11y - 6$.

(3) $x^2 + 2(a + b)x - 3a^2 + 10ab - 3b^2$.

练习

12. 分解因式：

(1) $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$

(2) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$

13. 因式分解：

(1) $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$.

(2) $6x^2 + xy - 2y^2 + 2x - 8y - 8$.

例题

14. 当 m 取何值时，多项式 $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + m$ 可以分解成两个一次因式的积（ ）.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

练习

15. m 为什么数时， $x^2 + 7xy - 18y^2 - 5x + my - 24$ 可以分解为两个一次因式的积？（ ）.

A. 10

B. 43或-78

C. 12

D. 13

|| 例题

16. 因式分解： $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 3ab + 4ac + 5bc$.

17. 因式分解： $3x^2 - 4y^2 + 3z^2 - 4xy - 10xz - 4yz$.

|| 练习

18. 分解因式：

(1) $x^2 - y^2 + 5x + y + 6$.

(2) $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 2x - y - 12$.

(3) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + 2$.

(4) $x^2 + 2(a + b)x - 3a^2 + 10ab - 3b^2$.

三、主元法

1. 分解含多个字母的多项式

在分解一个含有多个字母的多项式时，选择 _____ 字母作为主要元素，其他的字母当做已知数，将多项式按照选定的字母按照 _____ 排列，然后进行恰当的分组进行分解。

比如，对 $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$ 进行因式分解，选主元为 y 、并 _____ 排列得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} . \end{aligned}$$

例题

19. 分解因式： $a^2b - ab^2 + a^2c - ac^2 - 3abc + b^2c + bc^2$.

练习

20. 分解因式：

(1) $y(y+1)(x^2+1) + x(2y^2+2y+1)$.

(2) $(b+c)a^2 - (b^2+c^2+3bc)a + b^2c + bc^2$.

21. 分解因式： $2a^2b^2 + 10a^2b + 12a^2 - 3ab^2 - 15ab - 18a - b^2 - 5b - 6$.

2. 分解次数较高的多项式

在分解一个含有多个字母的多项式、且其中有些字母的指数较高时，选择指数 _____ 的字母作为主要元素，其他的字母当做已知数，将多项式按照选定的字母按照 _____ 排列，然后进行恰当的分组进行分解 . 比如，对 $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$ 进行因式分解，

观察到这是关于 z 的 _____ 次多项式，因此选主元为 _____、并 _____ 排列得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} . \end{aligned}$$

例题

22. 分解因式： $x^4 + x^2 + 2ax + 1 - a^2$.

练习

23. 分解因式： $(a + b)c^3 - (a^2 + ab + b^2)c^2 + a^2b^2$.